Forsøg

til

en ny analytisk Maade at finde Differentialerne til de foranderlige Størrelser.

Ved

Niels Morville.

Naar en foranderlig Størrelse er paa Grændserne af at sees og ikke sees, eller at forsvinde, da faaer dens Forfatning i samme Øieblik Navn af det man kalder en Differentialstørrelse, eller som man i det danske Sprog vil bedst kunne udtrykke ved en foranderlig Størrelses Skielstørrelse, hvilket Udtryk i mine Tanker fuldkommen indbegriber alt det selvsamme som det Navn Differentialstørrelse, eftersom Differentialet til en foranderlig Størrelse er at ansee som en Punct til en Linie. Jeg tør derfor bruge de samme Ord om en Differentialstørrelse, som Labbeus melder om en Punct, Qvid est Punctum? nihil, si experientiæ credis, aliqvid est, si rationem consulis, et aliqvid et nihil si Philosophos audis. Saalænge en foranderlig Størrelse (x) kan sees i sin foranderlige Afvexling, vil den kunne forestilles ved $+ x$, eller en positiv foranderlig Størrelse, men naar den gaaer ligesaa langt ud fra Grændseskiellet af at kunne sees, som den forhen var indenfor Synsskiellet, maae man ansee den at overgaae til en ligesaa stor negativ eller negtende Størrelse, og da vil den kunde forestilles ved $- x$. Dersom man altsaa vil betragte denne foranderlige Størrelse i det Øieblik, da den er paa Grændseskiellet af at kunne sees og ikke kunne sees, eller at forsvinde, bliver dens

dens analytiske Udtryk $= + x - x$; følgeligen bliver i Overeensstemmelse med fornævnte Begreb om en Differential- eller Skielstørrelse $x - x =$ Differentialet af x, eller som man sædvanlig udtrykker ved dx, saa $x - x = dx$.

Naar derfor en foranderlig Størrelse fradrages fra sig selv, bemærker det analytiske Udtryk Differentialet af den foranderlige Størrelse; derimod naar tvende nærpaafølgende Værdier af x, nemlig x og x', betragtes, saa er $x' - x = \Delta x$, eller den endelige Forskiel mellem en foranderlig Størrelses nærmeste Værdier, eller den foranderlige Størrelses sandselige Forandring.

Anmerkning. Naar Differencer, som blive antagne endelige, forsvinde og gaae over til intet, fremkommer Differentialer, melder Euler udi Instit. calc. differ. Pars Posterior. Cap. 3. Dette bestyrker mig i den forklarte Maade, at udtrykke Differentialet af x ved $x - x$, og ikke ved $x' - x$, som er en endelig Difference af x, imod at Differentialer maae, som Euler paastaaer, i sin Natur ansees $= 0$.

Da det saaledes er tilstrækkeligen forklaret og oplyst, at en foranderlig Størrelses Differential- eller Skielstørrelse fremkommer ved at fradrage den foranderlige Størrelse fra sig selv, saa at $x - x = dx$, saa følger, at $x^2 - x^2 =$ Differentialet af x^2, og $x^3 - x^3 =$ Differentialet af x^3, samt $x^4 - x^4 =$ Differentialet af x^4, og $x^n - x^n =$ Differentialet af x^n.

Det er bekiendt, at Differential- og Integral-Lærere bygge deres hele Beregning paa de Forudsætninger: at en uendelig liden Størrelse maa forkastes i Hensigt til en endelig Størrelse, og en uendelig liden Størrelse af høiere Orden maa forsvinde i Hensigt til en uendelig liden Størrelse af ringere Orden, samt at høiere Potenser af meget smaa Brøk eller forsvindende Størrelser maae forkastes i Samling med ringere Potenser.

Ingen kan negte, at disse Sætninger jo ere rimelige, men det er dog i sig selv noget, som sætter hele Differential- og Integrallæren ud af det naturlige Lys, som bør veilede til rigtige og tydelige Slutninger, og ligesom ufor-mærkt bringer En paa den Tanke, at der af Sætninger, som ikke ere fuldkommen rigtige, skulde kunne sluttes noget sandfærdigt og ufeilbart, thi at f. Ex. ansee $dx^2 = 0$, men ikke $dx = 0$, er jo en virkelig Modsigelse; desaarsag har jeg troet, at det var af Vigtighed, at udfinde saadan en Maade, som var ligefrem en Følge af den simple Analysis, hvorefter alle forskiellige Slags algebraiske Functioners eller medforanderlige Størrelsers Differentialer kunde bestemmes, uden at fordre noget skulde forkastes eller hensigtsviis udelades; til den Ende har jeg i Overeensstemmelse med foranførte opløst følgende Opgaver.

Opgave.

At udfinde Differentialet eller Skielstørrelsen af x^2.

Sæt y er den nærmeste paafølgende Afvexling af Værdien af x, det er da bekiendt at $x^2 - y^2 = (x + y) . (x - y)$, altsaa $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$; sæt at $y = x$, omsættes den Værdie i Tilfælde at man tager de tvende nærmeste Værdier af x saa nær som mueligt, da bliver $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = x + x = 2x$; men $x^2 - x^2 =$ Differentialet af x^2, og $x - x =$ Differentialet af x, alt i Følge foranførte, altsaa bliver $\frac{\text{Differentialet af } x^2}{\text{Differentialet af } x} = 2x$; men Differentialet af x betegnes almindeligen ved dx, følgeligen $\frac{\text{Differentialet af } x^2}{dx} = 2x$; altsaa bliver Differentialet af $x^2 = 2xdx$.

Saaledes er da Differentialet af x^2 bestemt, uden at udelade eller forkaste noget, saa man hverken med Newton behøver at søge sin Tilflugt til en almindelig Række, og deraf udelade Leed, der ansees at forsvinde i Hensigt til foregaaende, ei heller med Euler, for at bestemme Differentialet af x^2, behøver at ansee Differentialet af x^2 ved Hielp af dets endelige Tilvæxt, betragte den endelige Difference af $x^2 = 2xw + w^2$, naar w er den Øieblikstilvæxt, som x faaer, og derefter ansee w^2 som en forsvindende og forkastelig Størrelse i Hensigt til 2xw, for derved at kunne bestemme Differentialet af $x^2 = 2xdx$, hvilken sidste Maade medfører en øiensynlig Modsigelse for Lærlingen; thi skulde man ansee $w^2 = 0$, saa maatte man jo og efter analytiske Grundsætninger befinde $w = 0$, da Qvadratroden nødvendigen maa være $= 0$ naar Qvadraten er $= 0$.

Efter saaledes at have bestemt Differentialet af x eller af Qvadratet af en foranderlig Størrelse, kan man, uden at ansee noget som forsvindende, bestemme Differentialet af et Product af tvende medforanderlige Størrelser, f. Ex. af xy; man kan endog skimte dets Differential af Differentialet til x^2 =

$= 2xdx = xdx + xdx$, ved at udi det første Leed sætte dy isteden for dx, og udi det andet Leed sætte y isteden for x. Ellers kan Differentialet af xy efter Kæstners Methode og paa Grund af hvad jeg forhen har forklaret bestemmes saaledes, at derved ei noget ansees at forsvinde, hvilket er just min Hovedhensigt med denne min Afhandling, at bevise og bestemme det som endnu ei har været afgiort i Differentialregningen, nemligen at uden Forsvindelses Hypothe, der er en daarlig Grund at bygge Theorier paa, udfinde Differentialerne til de almindelige forskiellige analytiske Formler.

For at bestemme Differentialet af xy benytter man sig af følgende ligegyldige analytiske Udtryk: $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$; sæt $x + y = u$, $x - y = v$, saa er $(x + y)^2 = u^2$, $(x-y)^2 = v^2$; $d(x+y)^2 = 2udu$, $d(x-y)^2 = 2vdv$; men da $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, saa er Differentialet af $(x+y)^2$ — Differentialet af $(x-y)^2$ = Diff. $4xy$; saasom nu $d(x+y)^2 = 2udu$, og $d(x-y)^2 = 2vdv$, bliver $2udu - 2vdv$ = Diff. $4xy$; ved at dividere med 2 faaes da $udu - vdv$ = 2 Diff. xy; men da $x+y = u$, saa er $dx + dy = du$: og da $x-y = v$, er $dx - dy = dv$; følgeligen bliver ved Omsætning af Værdierne af u og v samt deres Differentialer $(x+y) . (dx+dy) - (x-y) . (dx-dy) = 2d(xy)$, og $xdx + xdy + ydx + ydy - xdx + xdy + ydx - ydy = 2d(xy)$, og $2xdy + 2ydx = 2d(xy)$, altsaa $xdy + ydx = d(xy)$.

Opgave.

At udfinde Differentialet af x^3.

Det er en Følge af Division at $\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$. Sættes da $y = x$, bliver $\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$; men $x^3 - x^3$ er = Differentialet af x^3, og $x - x$ = Differentialet af x, i Følge foranførte Forklaring; følgeligen bliver $\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$, og $dx^3 = 3x^2dx$.

Paa den Maade har man da bestemt Differentialet af x^3, uden at forkaste det allerringeste, eller uden at ansee noget hensigtsviis at forsvinde.

Opgave.

At bestemme Differentialet af x^4.

Det er en Følge af Division at $\frac{y^4 - x^4}{y^2 - x^2} = y^2 + x^2$; sættes da $y = x$, bliver $\frac{x^4 - x^4}{x^2 - x^2} = x^2 + x^2 = 2x^2$; men $x^4 - x^4$ er = Differentialet af x^4, i Følge foranførte, og $x^2 - x^2$ er = Differentialet af x^2, følgeligen $\frac{dx^4}{dx^2} = 2x^2$; men $dx^2 = 2xdx$, i Følge foranførte, altsaa $\frac{dx^4}{2xdx} = 2x^2$, og $dx^4 = 4x^3dx$.

Opgave.

At udfinde Differentialet til x^5.

Ved Division erfares, at $\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$; sættes da $y = x$, saa bliver $\frac{x^5 - x^5}{x - x} = x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4 = 5x^4$; men $x^5 - x^5$ = Differentialet til x^5, og $x - x$ = Diff. til x; altsaa $\frac{dx^5}{dx} = 5x^4$, og Differentialet til $x^5 = 5x^4dx$.

Opgave.

At bestemme Differentialet til x^6.

Ved Division er det bekiendt, at $\frac{x^6 - y^6}{x^2 - y^2} = x^4 + x^2y^2 + y^4$; sættes da $y = x$, saa bliver $\frac{x^6 - x^6}{x^2 - x^2} = x^4 + x^4 + x^4 = 3x^4$; men $x^6 - x^6$ = Differentialet x^6, og $x^2 - x^2$ = Diff. x^2, altsaa $\frac{dx^6}{dx^2} = 3x^4$, og følgeligen $dx^6 = 3x^4 . dx^2$; men $dx^2 = 2xdx$, følgeligen $dx^6 = 6x^5dx$.

Paa ligedan Maade kan man udfinde Differentialet til hvilken Potense som helst x^n; thi af anførte er det bekiendt, at naar x har n til Exponent, bliver Differentialet af $x^n = nx^{n-1}dx$, saavel naar $n = 1$ eller $= 2$ eller $= 3$ eller $= 4$ eller $= 5$ eller $= 6$ 2c., og naar Exponenten forvandles til $n + 1 = m$, blir følgeligen Differentialet af $x^{n+1} = d(x^n . x) = xdx^n + x^ndx = x . nx^{n-1}dx + x^ndx = (nx^n + x^n)dx = (n + 1) . x^ndx = mx^{m-1}dx$,

$mx^{m-1}dx$, saasom $n+1 = m$, og $n = m-1$; da nu den samme Maade kan igientages for hver Gang Exponenten forøges en Unitet, og det til hvad Størrelse den end naaer, saa sluttes, at Differentialet af x^m bliver $= mx^{m-1}dx$, hvad Værdie man end tillægger m. Ved at generalisere, eller paa en almindelig Maade analytiskviis udtrykke de forhen opløste enkelte Tilfælder, vil man ligefrem erholde Beviset paa Sætningens Rigtighed. Dersom $m = 2$, saa er $dx^2 = 2xdx = 2x^1dx = mx^{m-1}dx$; dersom $m = 3$, saa er $dx^m = 3x^2dx = mx^{m-1}dx$. Saafremt $m = 4$, saa at $dx^4 = dx^m$, da $dx^4 = 4x^3dx$, blir $dx^4 = mx^{m-1}dx$; og saaledes vil den almindelige Formel forestille et bestandigt tydeligt Billede paa Differentiationsreglen, da man af den Sætning $\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + + + x^{n-n}y^{n-1}$ kan, ved at sætte $y = x$, finde $\frac{x^n - x^n}{x - x} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + + + x^{n-1}$, hvori Ledenes Antal bliver $= n$.

Efter at jeg saaledes har viist en simpel analytisk Maade at udfinde Differentialet til en foranderlig Størrelses Potenser, naar samme er rational, eller dens Potense-Nævner er et heelt Tal, maae jeg dernæst forklare, hvorledes man skal bestemme Differentialet af irrationale foranderlige Størrelser, eller de, hvis Exponenter eller Potense-Nævnere ere brudne Tal.

Opgave.

At bestemme Differentialet til $\sqrt{x}$.

$\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; sættes da $y = x$, saa er $\frac{x - x}{\sqrt{x} - \sqrt{x}} = \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$; men $x - x = dx$, $\sqrt{x} - \sqrt{x} = d\sqrt{x}$, i Følge foranførte Forklaring, følgeligen $\frac{dx}{d\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$, og $dx = 2\sqrt{x} . d\sqrt{x}$, altsaa $\frac{dx}{2\sqrt{x}} =$ Differentialet af $\sqrt{x}$.

Denne Maade at bestemme Differentialet af en irrational Størrelse har jeg alene viist som en Prøve paa, at den af mig forhen forklarte ny Methode at bestemme Differentialer kan endog bruges til at differentere irrationale Størrelser; ellers kan man paa den almindelige Maade, ved Anvendelse af Foranførte, udfinde Differentialet til en irrational Størrelse, hvilken som helst; thi da Differentialet af x^m er som forhen meldt $= mx^{m-1}dx$, saa er Differentialet af $x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}dx$, og Differentialet af $x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}dx$. Hvilke Værdier som helst man da tillægger m og n, bestemmes derefter Differentialet af $x^{\frac{1}{m}}$ eller $x^{\frac{1}{3}}$ eller $\sqrt[3]{x}$ ligestor med $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$, eller $= (\frac{1}{3} : x^{\frac{2}{3}})dx = (\frac{1}{3} : \sqrt[3]{x^2})dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$. Dersom $m = 2$, $n = 7$, saa er Differentialet af $x^{\frac{m}{n}}$ eller $x^{\frac{2}{7}}$ ligestor med $\frac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}}dx$ eller $\frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}dx$. Paa ligedan Maade vil, saaledes som almindeligen er bekiendt, deslige Differentialer udfindes, uden at man skal behøve at ansee noget at hensigtviis forsvinde.

Ved Hielp af samme Formel, $mx^{m-1}dx =$ Differentialet af x^m, kan man, som bekiendt, bestemme Differentialet af de foranderlige Størrelser, som have negative Exponenter. Saaledes bliver f. Ex. Differentialet af y^{-m} den Differentialstørrelse $-my^{-m-1}dy$ eller $\frac{-mdy}{y^{m+1}}$; er da $m = 1$, blir Differentialet af y^{-1} eller af $\frac{1}{y}$ den Differentialformel $\frac{-dy}{y^2}$.

Selvsamme Maade tiener og til at bestemme Differentialet af tvende foranderlige Størrelsers Qvotienter, f. Ex. $\frac{x}{y}$; thi da $\frac{x}{y} = x . \frac{1}{y}$, saa er, i Følge foranførte, $d(x . \frac{1}{y}) = dx . \frac{1}{y} + d\frac{1}{y} . x = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{y^3dx - xydy}{y^3}$ $= \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Da alle anførte Differentialformler ere Grund til de mere sammensatte algebraiske Functioners Differentialers Bestemmelse, og den af mig forklarte Methode ei videre behøver at anvendes paa de Formlers Differentialbestemmelse, som ere sammensatte paa hvilken Maade som helst af foranførte enkelte, forbigaaer jeg at forklare, hvorledes de sammensatte Formlers Differentialer bestemmes af de enkelte, eftersom de Skrivter, som afhandle Differentialregningen, giver derom udførlig Forklaring.

Anmærkning. Omendskiøndt jeg ved foregaaende Opgavers Opløsning ikke har benyttet mig af andre Sætninger end de, som virkeligen ere

uom-

uomstødelige, saa vil jeg dog her til Slutning føie en nærmere Forklaring over samme.

At man kan forestille Differentialet af en foranderlig Størrelse, hvilken som helst x, ved $x - x$, er netop en Følge af, at man forestiller den endelige Difference af x ved $x - x'$, eller ved Forskiellen mellem dens nærmeste paafølgende Værdier, og ligesaa tvetydigt det almindeligen i Differentialregningen er, at dx er enten $= 0$ eller en uendelig liden eller uangivelig Størrelse, ligesaa tvetydigt kunde det og ansees, om $x - x$, eller om man vil tilkiendegive en liden Forskiel mellem Bogstaverne $x - x$, skulde bemærke et virkeligt Nul eller en uangivelig Størrelse (qvavis assignabili minor). Naar da den Maade forudsættes at tilkiendegive Differentialer af foranderlige Størrelser eller Functioner, hvilke som helst, vil man letteligen indsee, at f. Ex. $\frac{x^2 - x^2}{x - x}$ forestiller et Qvadrats og dets Sides Forsvindelses Forhold (ultima ratio evanescentiæ), nemligen Forholden mellem Qvadratets Differential og dets Sides Differential.

Maaden, hvorpaa jeg er kommen til denne Slutning, at $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = 2x$, bestaaer i en pur Omsætning af $y = x$ udi den almindelige analytiske Sætning $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$, som, naar den er almindelig, maae nødvendig være sandfærdig, hvad Værdie y end tillægges, følgeligen og i Tilfælde at $y = x$; og ingen vil kunne negte, at $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = \frac{(x - x) \cdot (x + x)}{x - x}$, ligesaavel som at $\frac{(x - y) \cdot (x + y)}{x - y} = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$; derfor bliver $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = \frac{0 \cdot (x + x)}{0 \cdot 1}$ eller $= \frac{0}{0} \cdot \frac{2x}{1}$; og $\frac{2x}{1}$ viser, at det er den Qvantitet hvorved Multiplication og Division med Nul har hævet hinanden.

En foranderlig Størrelse kan ikke tilintetgiøres eller forvandles til Nul paa anden Maade end ved de arithmetiske Operationer, enten ved Subtraction, Multiplication eller Division. Naar f. Ex. $x + 1$ multipliceres med $x - 1$, og $x = 1$, saa er det det samme som at multiplicere $x + 1$

med o; følgeligen bliver $\frac{(x+1).(x-1)}{x-1} = \frac{0.(x+1)}{0.1}$; men da $(x+1).(x-1)$ er en Function af anden Grad, maae den have tvende Værdier, og eftersom denne Function er dividert med den ene Værdie $x-1$, maae denne Functions sande Værdie alene være af een Grad, altsaa $x+1$, som bliver den virkelige Værdie af $\frac{x^2-1}{x-1}$, i Tilfælde at $x=1$, da altsaa $\frac{x^2-1}{x-1}$ bliver $= x+1 = 2$. Under alt dette forvexler man ingenlunde Begrebet om o med en virkelig Størrelse, men denne Fremgangsmaade er en nødvendig Følge af Analysis, for at finde de Størrelser, nemligen $x+1$ og 1, som i Tæller og Nævner ere ved den arithmetiske Operation, nemligen i dette Tilfælde ved Multiplication, forvandlede til Nul. Ligedan forholder det sig med den brudne Function af x, nemligen $\frac{x^2-a^2}{x-a}$, i Tilfælde at $x=a$, da er $x-a=0$, altsaa $\frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{0}{0} . \frac{x+a}{1}$; men da o saavel i Tæller som Nævner forestiller $x-a$, saa bliver ved Division $\frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{x+a}{1}$, og følgeligen, i Tilfælde at $x=a$, bliver $\frac{x^2-a^2}{x-a} = 2a$; men da nu $x=a$, saa er ogsaa $a=x$, følgeligen bliver ved Omsætning $\frac{x^2-x^2}{x-x} = 2x$. Man seer da, at $\frac{x^2-x^2}{x-x} = 2x$ er ligefrem en Følge af det bekiendte Bernoullianske Problems Opløsning: At finde Værdien af en Brøk, hvis Tæller og Nævner ved en vis Omsætning forsvinde, som i Grunden er det selvsamme, som at finde Værdien af en Brøk, hvis Tæller saavelsom Nævner ere reducerte til Nul Værdie ved Multiplication med en fælleds Factor, som er $=0$, og udfinde de Størrelser i Tæller og Nævner, som udi samme ere saaledes virkeligen multiplicerte med o.

Min Hensigt med forhen forklarte Maade, hvorpaa jeg har udviklet Differentialregningen, har alene været, at paa en simpel analytisk Maade, og efter de almindelige analytiske Grundsætninger, saaledes udfinde Differentialet af en Potens af en foranderlig Størrelse, at man ikke dertil skulde behøve at udtrykkeligen forkaste noget, eller ansee noget hensigtviis $=0$, saaledes som Newtons og Eulers Methoder nødvendigen fordre, hvorved hæves den Forvisning, man bør have om Udslagenes sande Rigtighed og Nøiagtighed i alle muelige Tilfælde, hvilken Forvisning er i mine Tanker ligesaa

ligesaa nødvendig som den geometriske Evidence om Differentialernes naturlige Oprindelse.

Til Slutning skal jeg besvare den Indvending, som man kan giøre imod den af mig beviste Sætning at $\frac{x^n - x^n}{x - x} = nx^{n-1}$, omendskiønt Indvendinger, som giøres imod en Sætning, som af uomstødelige Grunde ved lovlige analytiske Slutninger er beviist, ei kuldkaste Sætningen selv, da dette ei kan skee forinden Beviset for samme er giendrevet. Naar f. Ex. $\frac{x^2 - x^2}{x - x}$ forvandles til $\frac{x.(x-x)}{x-x}$, sluttes, at $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = x$, som ellers bliver, efter mit forhen anførte Beviis, $= 2x$. Jeg negter ikke, at x indbefatter alt det Foranderlige, som Forholden $\frac{x^2 - x^2}{x - x}$ indeholder; men det indbegriber ikke den virkelige bestandige Størrelse, der i dette Tilfælde udtrykkes ved $\frac{x - x}{x - x}$, som man har anseet som Unitet $= 1$, hvilken er ei bestemt, men hvis sande Talbestemmelse alene kan udfindes ved Hielp af den forhen forklarte Methode. Det er Forholden mellem den foranderlige Størrelses Exponent i Tæller og Nævner der bestemmer den bestandige Coefficient til x, og følgeligen den bestandige Værd af $\frac{x - x}{x - x}$. Dersom man havde $\frac{ax - ax}{x - x}$, da var ligefrem $\frac{ax - ax}{x - x} = a . \frac{x - x}{x - x} = a$. Eftersom da $\frac{x - x}{x - x}$ er virkeligen $= 1$, saasom x har kun een Unitet til Exponent saavel i Tæller som Nævner; men udi $\frac{x^2 - x^2}{x - x}$ forestiller Tæller eller Dividendum $x^2 - x^2$ et Product af tvende tonavnige Functioner af x, men Nævneren eller Divisor en tonavnig eller to gange nævnt Function af x, følgeligen maae den fuldstændige Qvotient eller Forholdsnævneren være en tonavnig eller to gange nævnt Function af x; ligeledes forestiller $\frac{x^3 - x^3}{x - x}$ Tælleren eller Dividendum $x^3 - x^3$ et Product af ligesaa mange tonavnige eller to gange nævnte Functioner af x, som der er Uniteter i Exponenten, altsaa trende, og naar disse divideres med Nævneren eller Divisor $x - x$, som er en tonavnig eller to gange nævnt Function af x, maae udkomme et Product af tvende tonavnige Functioner af x, som i Følge Bino-

 mial-

mialloven giver en trenavnig eller tre gange nævnt Function af x af anden Potens. Paa ingen anden Maade kan man derfor undgaae ald den Tvetydighed og Ubestemthed, som virkelig Division foraarsager, end som forhen er viist ved at benytte den almindelige Sætning $\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$, sætte $x=y$, for at udfinde $\frac{x^2-x^2}{x-x}=x+x=2x$; eller $\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$, for at udfinde $\frac{x^3-x^3}{x-x}=x^2+x^2+x^2=3x^2$; eller udi $\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+x^{n-4}y^3+\,+\,+x^{n-n}y^{n-1}$, sætte $y=x$, da $\frac{x^n-x^n}{x-x}=x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\,+\,+x^{n-1}$, hvis Leeds Antal bliver $=n$, saa at $\frac{x^n-x^n}{x-x}=nx^{n-1}$.

Uden Anvendelse af denne Methode vil man ikke kunne finde de fuldstændige Qvotienter af $\frac{x^2-x^2}{x-x}$, $\frac{x^3-x^3}{x-x}$, $\frac{x^4-x^4}{x-x}$ &c., da den bestandige Størrelse, hvormed det Foranderlige i hver af disse Qvotienter skal være multipliceert, saasom 2 i første, 3 i anden, 4 i tredie o. s. v., alene kan ved fornævnte Methode med Vished og uden Tvetydighed bestemmes, hvilke ellers ved at forestille $\frac{x^2-x^2}{x-x}=x$, $\frac{x^3-x^3}{x-x}=x^2$, $\frac{x^4-x^4}{x-x}=x^3$ &c., betegnes ved Uniteter, paa Grund af at man anseer $\frac{x-x}{x-x}=1$. Naar $\frac{x-x}{x-x}$ er multipliceert med en uforanderlig Størrelse, f. Ex. a, saa er den bestemt, f. Ex. i $\frac{ax-ax}{x-x}$, men naar $\frac{x-x}{x-x}$ er multipliceret med en foranderlig Størrelse, saasom x i første, x^2 i andet, x^3 i tredie Tilfælde, saa maae den paa anden Maade fastsættes, da den, som forhen meldt, ikke kan udfindes, uden at applicere den af mig forklarte Methode.